1 Zahlentypen

1.1 Natürliche Zahlen

Nach ÖNORM versteht man unter $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- 1 ist die kleinste natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl besitzt einen Nachfolger.
- Zwischen einer natürlichen Zahl n und deren Nachfolger $n + 1$ liegt keine weitere natürliche Zahl. Die Darstellung der natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl ergibt daher isolierte Punkte.
- Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Man verwendet die natürlichen Zahlen zum Zählen beziehungsweise zum Festlegen einer Reihenfolge. Sie treten auch bei Aufgaben über Anzahlen (Schülerzahlen, Einwohnerzahlen,...) auf.

Die Addition und die Multiplikation lassen sich in der Menge $\mathbb{N}$ uneingeschränkt ausführen. Subtraktion und Division sind jedoch nicht immer ausführbar; das Ergebnis dieser Aufgaben liegt dann nicht in der Menge $\mathbb{N}$.

1.2 Ganze Zahlen

Schon im Bereich des täglichen Lebens stößt man auf Aufgaben, welche die "Erfindung" neuer Zahlen, der negativen ganzen Zahlen, nahelegen (Temperaturangaben; Höhen und Tiefen, bezogen auf den Meeresspiegel; Gewinn und Verlust im Geschäftsleben;...). Durch diese neuen Zahlen wird die Menge der natürlichen Zahlen so ergänzt, dass alle möglichen Subtraktionsaufgaben gelöst werden können.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

Die natürlichen Zahlen werden als positive ganze Zahlen angesehen. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist daher eine Teilmenge der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Eigenschaften der ganzen Zahlen:

- Jede ganze Zahl besitzt zwei Nachbarn, einen Vorgänger und einen Nachfolger.

- Es gibt keine größte ganze Zahl und auch keine kleinste ganze Zahl.

Wie für die Menge $\mathbb{N}$ gilt jedoch:

- Zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen liegt keine weitere ganze Zahl.

Wir nennen den "Abstand", den eine Zahl x vom Ursprung hat, den **Betrag** von x und bezeichnen ihn mit $|x|$. Es gilt:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0 \\ -x, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Innerhalb der Menge $\mathbb{Z}$ sind nun die Addition, die Multiplikation und auch die Subtraktion stets ausführbar. Dies gilt jedoch nicht für die Division.

1.3 Rationale Zahlen

Ergebnisse von Divisionen ganzer Zahlen, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen, lassen sich als Brüche bzw. als Dezimalzahlen schreiben. Es ist daher sinnvoll, wenn wir die Menge der ganzen Zahlen um die Menge aller möglichen Brüche $\frac{a}{b}$ erweitern. Auf diese Weise ergibt sich die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \, | a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

Die Bezeichnung $\mathbb{Q}$ kommt vom Wort Quotient. Man nennt a denn Zähler und b den Nenner des Bruches. Die Division durch 0 ist auszuschließen.

Die Menge $\mathbb{Q}$ enthält die Menge $\mathbb{Z}$ als Teilmenge, denn es gilt zum Beispiel:
$\frac{5}{1} = 5$, $\frac{6}{2} = 3$,...
In der Menge $\mathbb{Q}$ sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch Null) unbeschränkt ausführbar.

Jeder rationalen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden. Im Gegensatz zu einer ganzen Zahl besitzt jedoch eine rationale Zahl keine Nachbarn. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es stets eine weitere rationale Zahl. Eine Menge mit einer solchen Eigenschaft heißt **dichte Menge**. Eine rationale Zahl kann daher keine rationalen Zahlen als Nachbarn haben, weil zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen – und mögen sie noch so nahe beisammen liegen – stets eine weitere rationale Zahl liegen muss. Das ist wohl nicht ganz leicht vorstellbar!

1.4 Reelle Zahlen

Zwischen zwei verschiedenen Punkten A und B der Zahlengeraden, die rationale Zahlen darstellen, liegt mindestens ein weiterer Punkt C, der eine rationale Zahl darstellt. Die gleiche Überlegung kann für die Punkte A und C (bzw. B und C) durchgeführt werden. Zwischen ihnen liegt wiederum mindestens ein Punkt, der zu einer rationalen Zahl gehört usw.

Daraus erkennen wir: Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele rationale Zahlen. Auf der Zahlengeraden liegen also zwischen zwei zu rationalen Zahlen gehörenden Punkten unendlich viele weitere Punkte, die wieder rationale Zahlen darstellen. Es liegt also die Vermutung nahe: Die rationalen Zahlen füllen bei ihrer Veranschaulichung auf der Zahlengeraden die Zahlengerade vollständig aus. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist die Länge d der Diagonale einer Quadrates $d = a \cdot \sqrt{2}$. Wählen wir $a = 1$, so gilt: $d = \sqrt{2}$.

Wir konstruieren ein Quadrat über der Strecke von 0 bis 1 der Zahlengeraden und schlagen die Diagonalenlänge auf der Zahlengeraden ab. Man erhält genau einen Punkt, dem die Zahl $\sqrt{2}$ zugeordnet wird. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl; es muss also an der Stelle der Zahlengeraden, an der $\sqrt{2}$ liegt, eine "Lücke" sein. Nicht alle Punkte der Zahlengeraden lassen sich also durch rationale Zahlen erfassen.

Um jeden Punkt der Zahlengeraden zu erfassen, muss die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auf die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** erweitert werden. Es gilt: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Reelle Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, heißen **irrationale Zahlen** (etwa $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π,...).

Man kann zeigen: Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Die reellen Zahlen füllen also die Zahlengerade vollständig aus. Man sagt: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist **vollständig**.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Gelegentlich verwendet man auch die Mengen $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^-$ und $\mathbb{R}_0^+$. Dabei bedeuten der Index $+$ die Beschränkung auf positive Zahlen, der Index $-$ die Beschränkung auf negative Zahlen und der Index 0 das Hinzufügen der Zahl 0 als Element der Menge. Beispielsweise beschreibt $\mathbb{Z}_0^+$ die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Oft werden auch Mengen verwendet, bei denen bestimmte Elemente nicht enthalten sein dürfen. Man schreibt etwa für die Menge aller reellen Zahlen ohne die Zahl 0 die Symbole $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ oder $\mathbb{R}^*$. Es gilt: A$\backslash$B ist die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen. Der Index * kennzeichnet laut ÖNORM Mengen, bei denen die Null weggelassen wurde.